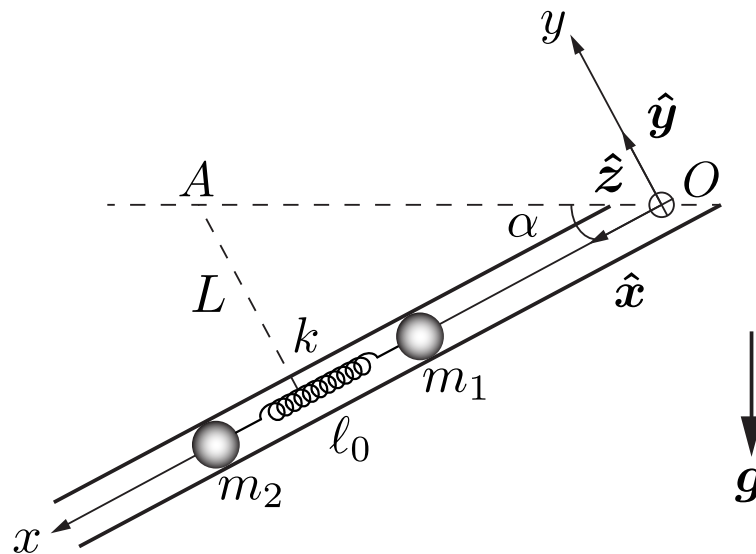


Nom :

 Prénom :

 N° Sciper :



Dans un plan vertical, une bille considérée comme un point matériel de masse m_1 est reliée à une autre bille considérée comme un point matériel de masse m_2 par un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 . Le système constitué des deux points matériels est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un tube immobile qui fait un angle α avec la droite horizontale passant par les points O et A . On décrit la dynamique du système de points matériels par rapport au repère cartésien $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Soit $\mathbf{r}_1 = x_1 \hat{x}$ le vecteur position du point matériel de masse m_1 , $\mathbf{r}_2 = x_2 \hat{x}$ le vecteur position du point matériel de masse m_2 et g la norme du champ gravitationnel $\mathbf{g}$. Soient $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ la masse réduite du système, $\Delta m = m_2 - m_1$ la différence de masse entre les deux points matériels et L la distance qui sépare le point A de l'axe Ox de symétrie du tube. On suppose qu'il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

Questions et réponses au verso !

1. **(1.0 point)** Déterminer les deux équations scalaires du mouvement des points matériels de masse m_1 et m_2 , résultant de la projection des lois vectorielles du mouvement de ces points matériels le long de l'axe Ox de symétrie du tube, en termes des coordonnées de positions x_1 et x_2 , des dérivées temporelles de ces coordonnées de position et des grandeurs scalaires constantes $m_1, m_2, g, \alpha, k, \ell_0$:

masse m_1 :

masse m_2 :

2. **(1.0 point)** Compte tenu des conditions initiales $x_1(0) = -d$ et $x_2(0) = d$ sur les coordonnées de position et les conditions initiales $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ sur les coordonnées de vitesse, déterminer l'évolution temporelle de la coordonnée $X_G(t)$ du centre de masse et l'évolution temporelle de la coordonnée relative $x(t)$, définies respectivement comme,

$$X_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad x = x_2 - x_1$$

en termes du temps t et des constantes $g, d, \ell_0, \alpha, k, M, \Delta m$ et μ .

$X_G(t) =$

$x(t) =$

3. **(1.0 point)** En prenant comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle la droite horizontale qui passe par les points A et O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'état du ressort au repos, déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système de points matériels en termes des coordonnées de position X_G et x , des coordonnées de vitesse $\dot{X}_G$ et $\dot{x}$ et des grandeurs scalaires constantes $M, \mu, g, \alpha, k, \ell_0$:

$T =$

$V =$

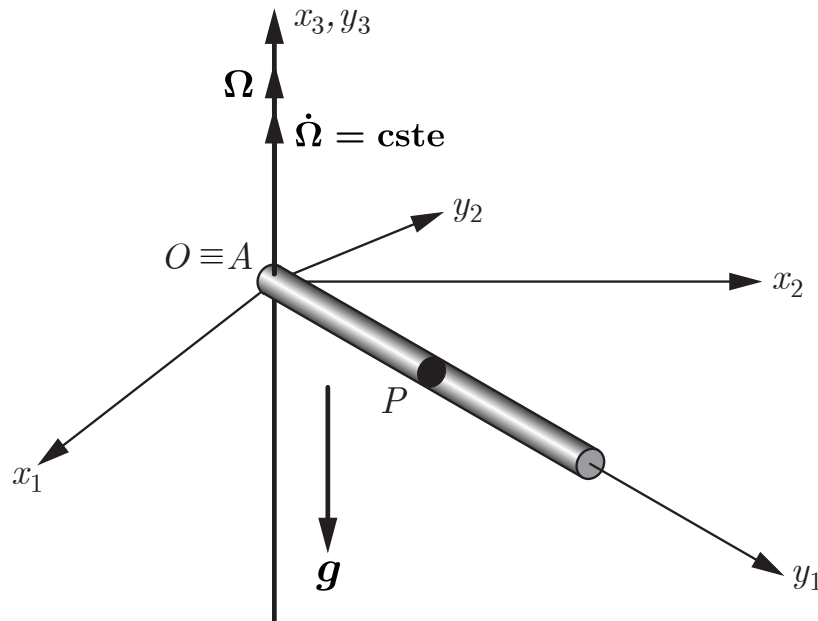
4. **(0.5 point)** Déterminer l'expression vectorielle du moment cinétique $\mathbf{L}_A$ du système de points matériels évalué au point A en termes des grandeurs scalaires constantes M, L , de la coordonnée de vitesse du centre de masse $\dot{X}_G$ ou de la coordonnée de vitesse relative $\dot{x}$ et d'un vecteur unitaire du repère cartésien $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (n.b. signe inclus) :

$\mathbf{L}_A =$

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



On considère une centrifugeuse constituée d'un tube tournant dans un plan horizontal avec une accélération angulaire $\dot{\Omega} = \dot{\Omega} \hat{x}_3$ constante et une vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{x}_3$ autour de son extrémité située au point O . Un point matériel P de masse m est astreint à se déplacer le long du tube. On associe au référentiel absolu de la centrifugeuse le repère absolu $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ et au référentiel relatif du tube le repère relatif $(O, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ où l'axe Oy_1 est orienté le long du tube. Le point matériel est soumis au champ gravitationnel $\mathbf{g} = -g \hat{x}_3$ et à l'action d'une force de frottement visqueux $\mathbf{F}_f = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v}_r(P)$ où τ est le temps d'amortissement et $\mathbf{v}_r(P)$ est la vitesse relative du point matériel.

Questions et réponses au verso !

1. **(1.5 point)** Dans le référentiel relatif du tube, établir les expressions vectorielles de la force centrifuge $\mathbf{F}_c$, de la force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ et de la force d'Euler $\mathbf{F}_E$ en termes des coordonnées cartésiennes de position relative, des coordonnées cartésiennes de vitesse relative, des grandeurs scalaires m , Ω , $\dot{\Omega}$ et des vecteurs unitaires du repère relatif cartésien $(O, \hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ (n.b. signe inclus) :

$$\mathbf{F}_c = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_C = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_E = \dots\dots\dots$$

2. **(1.0 point)** Dans le référentiel relatif du tube, déterminer l'équation scalaire du mouvement le long de l'axe de coordonnées relatif Oy_1 et l'expression vectorielle de la force de réaction normale du tube $\mathbf{N}$ en termes des coordonnées cartésiennes de position relative et de leurs dérivées temporelles, des grandeurs scalaires m , g , τ , Ω , $\dot{\Omega}$ et des vecteurs unitaires du repère relatif cartésien $(O, \hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ (n.b. signe inclus) :

$$\text{selon } \hat{\mathbf{y}}_1 : \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{N} = \dots\dots\dots$$

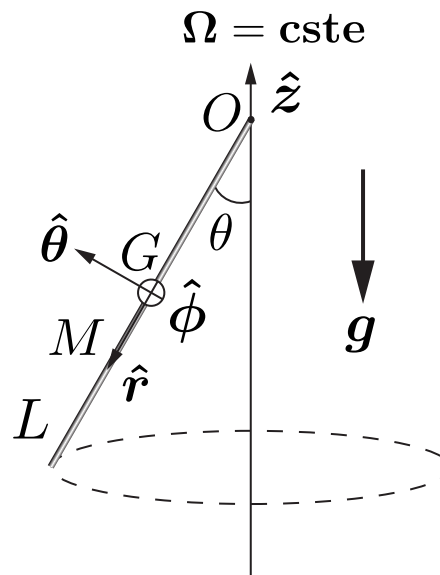
3. **(1.0 point)** Dans la limite où la norme de la force centrifuge est négligeable par rapport à la norme de la force de frottement visqueux, i.e. $\|\mathbf{F}_c\| \ll \|\mathbf{F}_f\|$, déterminer l'équation horaire $y_1(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $y_1(0) = 0$ et $\dot{y}_1(0) = v_1$ en termes de v_1 et d'autres grandeurs scalaires.

$$y_1(t) = \dots\dots\dots$$

Nom :

 Prénom :

 N° Sciper :



Une barre indéformable et homogène de masse M , de longueur L , d'épaisseur e négligeable, i.e. $e \ll L$, est fixée à l'une de ses extrémité au point O . L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O . La barre est en rotation autour de cet axe vertical à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ où $\hat{z}$ est le vecteur unitaire vecteur orienté vers le haut. Soit $(G, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre et g la norme du champ gravitationnel $\mathbf{g}$. Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial $G\hat{r}$ passant par son centre de masse G est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $G\hat{\theta}$ et azimutal $G\hat{\phi}$ passant par son centre de masse G sont égaux et s'écrivent $I_{G,\theta} = I_{G,\phi} = \frac{1}{12} ML^2$. On considère qu'il n'y a pas de frottement.

Questions et réponses au verso !

1. **(0.5 point)** Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\mathbf{L}_G$ de la barre évaluée par rapport à son centre de masse G en termes des grandeurs scalaires M , L , Ω , θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $(G, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ (n.b. signe inclus) :

$$\mathbf{L}_G = \dots\dots\dots$$

2. **(1.0 point)** Etablir l'expression vectorielle du moment cinétique $\mathbf{L}_O$ de la barre évaluée par rapport à l'origine O en termes des grandeurs scalaires M , L , Ω , θ et des vecteurs unitaires du repère d'inertie sphérique $(G, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ (n.b. signe inclus) :

$$\mathbf{L}_O = \dots\dots\dots$$

3. **(1.0 point)** A l'aide d'un théorème de dynamique du solide indéformable, déterminer l'angle $\theta = \text{cte}$ que fait la barre avec l'axe de rotation vertical en termes de grandeurs scalaires constantes données dans l'énoncé :

$$\theta = \dots\dots\dots$$

4. **(0.5 point)** Par rapport au référentiel d'inertie du sol, déterminer l'expression de l'énergie cinétique T de la barre en termes des grandeurs scalaires constantes M , L , Ω et θ .

$$T = \dots\dots\dots$$